Falsche Ansätze? – Geschicktes Probieren!

von Lutz Führer, Frankfurt am Main[1]

Gleichungen sind zum Ausrechnen da. Wer nicht weiß, wie das geht, der probiert zu raten. Und wenn die Gleichung etwas komplizierter ist, dann probiert er halt mehrmals. Kluge Leute werfen die misslungenen Versuche nicht einfach fort. Sie notieren sie übersichtlich und versuchen Schlüsse daraus zu ziehen: Auf welcher Seite lohnt die Weitersuche eher? Muss es zwischen den Werten einen richtigen geben? Könnte es sein, dass es nur unrealistisch-negative Lösungen gibt, oder vielleicht gar keine?

Intelligentes Probieren ist eine höchst leistungsfähige und eine durchaus mathematische Vorgehensweise. Sie ist sehr alt und ewig jung. Im Alltag wenden wir sie wie selbstverständlich an, wenn wir zu faul sind, eine oder mehrere Gleichungen mit Buchstaben aufzuschreiben. Im Mathematikunterricht sollten wir sie anwenden, wenn die Aufgabe zu schwer ist. Und in der Wissenschaft ist das geschickte Probieren unter dem Namen „Näherungsmethoden“ gang und gäbe, denn recht oft gibt es gar keine exakten Methoden, vielleicht gibt es sie, aber sie sind zu langsam oder zu fehleranfällig. Die Strategie ist dabei immer dieselbe: Rechne mit Probewerten, und versuche den Fehler zu korrigieren oder ihn wenigstens unter Kontrolle zu bringen! Beim Probieren wirst du die Aufgabe näher kennen lernen, und bei der Fehlerkorrektur die Zusammenhänge. Dem Anwender bringt das oft viel mehr als irgendeine virtuose Rechnerei nach Schema eff.

Wann ist eine Aufgabe zu schwer? Das hängt natürlich von dem ab, was man weiß und was man kann. Wenn man eine allgemeine Strategie verstehen und erlernen will, ist es sicher besser, man schaut sich erst einige „leichte“ Beispiele an, in denen gute Rechner sie anwandten, weil sie weniger konnten und wussten als wir, die wir uns auf eine lange Geschichte stützen können. Uns interessiert ja die Methode, deshalb sollten wir mit den Aufgaben selbst erst einmal keine Probleme haben. Ist die Strategie danach halbwegs klar, dann wird man sich gern an Beispielen von Könnern überzeugen, dass sie auch für „schwerere“ Aufgaben taugt. Und schließlich stellt sich die Frage, ob eine so gute Methode nicht auch irgendwie in die heutige Mathematik eingeflossen ist. Nach einem Wort von Leibniz sind ja die mächtigen Rechenroutinen der Algebra und der Analysis nichts anderes als aus Beispielen entwickelte Denkmethoden, die man halbautomatisiert hat, um das Nachdenken über Komplizierteres zu entlasten. Man versteht sie allemal besser, wenn man sich vorstellen kann, woher sie kommen.

Der einfache „falsche Ansatz“

1

Ich denke mir eine Zahl und ihr Siebentel dazu. Dann habe ich 19. Wie heißt die gedachte Zahl?

Gute Bruchrechner können so etwas im Kopf: Wenn acht Siebentel des Gedachten gleich 19 sind, dann ist ein Siebentel davon gleich $\frac{19}{8}$, und das ursprünglich gedachte Ganze gleich $7 \cdot \frac{19}{8}$ bzw. gleich $\frac{133}{8}$. Nun sind gute Bruchrechner selten, häufiger trifft man den normalen Buchstabenrechner: $x + \frac{1}{7}x = 19$, d. h. $\frac{8}{7}x = 19$ bzw. $x = \frac{7}{8} \cdot 19$. Pfiffiger war ein Rechner um 2000 v.Chr., von dem der Schreiber-Lehrling Ahmes (Achmed, A’h-mose) dreihundert Jahre später folgendes abschreiben konnte:

---

[1] Vollständige Fassung des in „Math. Lehren“, Heft 91 (1998), S. 50-54, gekürzt erschienenen Aufsatzes „Geschicktes Probieren – Eine entdeckende Wiederholung am Beginn der Oberstufe“.

Aufgabe 24 aus dem Papyrus Rhind (1650 v.Chr.):

Ein Haufen und sein Siebentel zusammen genommen ergeben 19.

/ 1	7
/ $\frac{1}{7}$	1
1	8
/ 2	16
$\frac{1}{2}$	4
/ $\frac{1}{4}$	2
/ $\frac{1}{8}$	1

....

Zitiert nach Pichot, S. 182

Wer sieht die Idee? Leider hatten schon damals manche Schüler (und Lehrer) die hässliche Angewohnheit, nur die Rechnung aufzuschreiben, und keinerlei Stichworte zur Erläuterung. Alles wäre ganz einfach, wenn folgendes dabei stünde:

vor der 1. Rechenzeile: „Nehmen wir einmal an, der Haufen bestünde aus 7 Teilen."

nach der 2. Rechenzeile: „Zusammen hätten wir dann 8 und nicht 19 Teile."

vor der 3. Rechenzeile: „Wie oft steckt die 8 in der 19? Wir probieren es mit Auffüllen und zählen die angestrichenen Teilergebnisse zusammen..."

Die eigentliche Korrekturidee verbirgt sich dann hinter einer etwas umständlichen Zahlenrechnerei, die wir hier nicht mehr wiedergegeben haben. Ist sie nicht schon zu raten? Sie lautet: So oft wie die 8 in der 19 steckt, so oft muss man die geratene 7 aufblasen, um die gesuchte Haufengröße zu bekommen, d.h. $\frac{19}{8} \cdot 7$.

Man sieht von der dritten Rechenzeile an sehr schön, wie man sich beim Dividieren von 19 durch 8 mit fortgesetzten Verdopplungen bzw. Halbierungen half, um herauszubekommen, dass die 8 insgesamt $2\frac{3}{8}$ mal in der 19 steckt (so dividieren Computer heute auch wieder, weil Verdopplungen im Dualsystem ganz leicht sind). Aber am Schluss half alles nichts, bei $2\frac{3}{8}$ mal 7 brauchten die Ägypter dann doch die Bruchrechnung.

2

Warum nahm Ahmes' Lehrer eine Sieben als Testzahl? (Eine 14 oder eine 21 wären noch besser gewesen, eine 1 oder 10 schlechter. Warum?)

3

Welche Testzahlen bieten sich in den folgenden Aufgaben an (Papyrus Rhind Nr. 25-27 und 31-34, zitiert nach Robins/Shute, S. 37f.)? Kannst du sie damit im Kopf lösen?

$$x + \frac{1}{2}x = 16, \quad x + \frac{1}{4}x = 15, \quad x + \frac{1}{5}x = 21,$$
$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33, \quad x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 2,$$
$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 37, \quad x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 10.$$

4

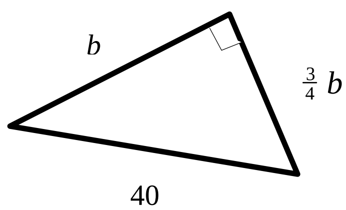
Ein altbabylonischer Keilschrifttext, der etwa zur gleichen Zeit wie Ahmes' Vorlage aufgeschrieben wurde, lautet in heutiger Übersetzung (etwas frei nach Pichot, S. 74):

„Ich habe einen Stein gefunden, aber ich habe ihn nicht gewogen; dann habe ich ein Siebentel hinzugefügt und vom neuen Klumpen noch ein Elftel. Ich habe alles zusammen gewogen: eine Mine. Welches war das ursprüngliche Gewicht des Steins?" (Der Text endet – ohne Rechnung – mit der lapidaren Feststellung: „Das Gewicht des Steins war 2/3 *Minen* 8 *Schekel und* $22\frac{1}{2}$ *Korn." Zur Kontrolle muss man wissen, dass 60 Schekel einer Mine entsprachen, und 180 Korn einem Schekel.)*

Auch die Babylonier kannten die „Methode des falschen Ansatzes". Vielleicht wurde das Steingewicht so berechnet. Hat der Autor vor viertausend Jahren richtig gerechnet?

5

Auf einer Keilschrifttafel aus altbabylonischer Zeit wird nach einem rechtwinkligen Dreieck gefragt, bei dem die Hypotenuse 40 *Ellen lang ist und die eine Kathete ¾ der anderen misst. Der Rechner beginnt mit der (falschen) Annahme, die größere Kathete sei 60 Ellen lang, und berechnet daraus die andere Kathete und die Hypotenuse. (Nach Vogel 1961, S. 93) Wie kam er wohl von dort zur Lösung?*

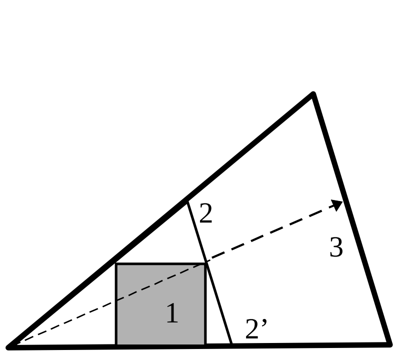


6

Um 500 n.Chr. hat Metrodorus eine „griechische Anthologie" alter Textaufgaben zusammengestellt. Eine verkleidete die Gleichung $x - (\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}) \cdot x = 44$. *Als Testzahl für den „falschen Ansatz" wird* 84 *vorgeschlagen (nach Vogel 1961, S. 91). Warum wohl? Kannst du die Aufgabe damit im Kopf rechnen?*

7

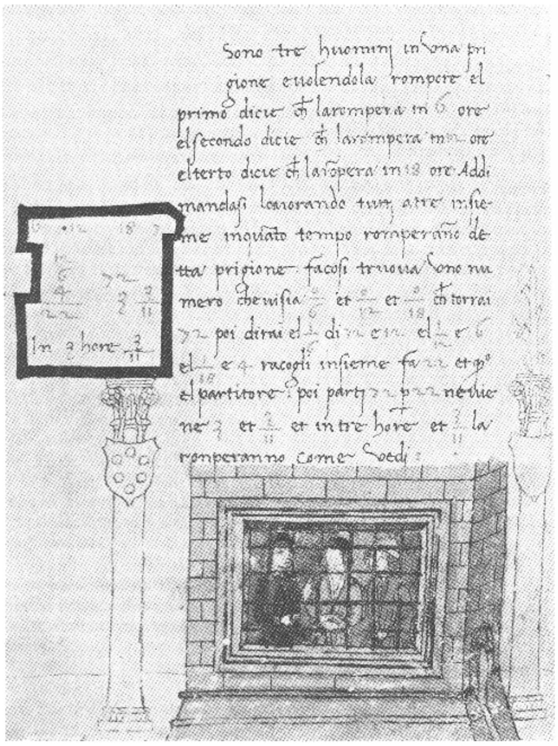
Wie findet man das größte Quadrat mit Ecken auf einem gegebenen Dreieck? Der Trick ist, erst ein kleines Quadrat einzuzeichnen, es dann mit einem ähnlichen Dreieck einzurahmen und das verkleinerte Bild schließlich auf die rechte Größe zu bringen. Die Methode des falschen Ansatzes funktioniert auch in der Geometrie – wenn man „ähnliche" Verhältnisse besser beherrscht. Inwiefern kann man in den voran stehenden Aufgaben von „ähnlichen Verhältnissen" sprechen?



8

Aus Filippo Calandri's „Trattato di arithmetica" von 1491: „Es sind 3 *Männer in einem Gefängnis, die ausbrechen wollen; der erste sagt, dass er in* 6 *Stunden das Gefängnis aufbrechen werde, der zweite sagt, dass er es in* 12 *Stunden aufbrechen werde, und der dritte sagt, dass er es in* 18 *Stunden aufbrechen werde. Die Frage ist, wenn alle* 3 *zusammenarbeiten, in welcher Zeit sie dann das Gefängnis aufbrechen werden." (Zitiert nach Tropfke 1980, S. 519)*

Hinweis: Überlege, wie viele Gefängnisse von allen dreien erbrochen werden, wenn sie x Stunden unermüdlich arbeiten, wobei $x := kgV(6, 12, 18)$.



Doppelt genäht, hält besser

In den bisherigen Aufgaben funktionierte jedes Mal der „einfache falsche Ansatz": Man nehme *eine* bequeme Testzahl und errechne aus dem Ergebnisfehler mittels Dreisatz die richtige Lösung. *Ein* Test ist freilich arg wenig, „ein Test ist kein Test" (wenn man die proportionale Natur des Problems nicht durchschaut), wie die folgende Aufgabe zeigt:

Aufgabe VII.9 aus „Neun Bücher arithmetischer Technik" (ca. 1. Jh. v.Chr.)

Jetzt hat man: (Gereinigtes) Getreide ist vorhanden in einem Faß von 10 Tou; man kennt seine Menge nicht. Man füllt es vollständig auf mit Grundhirse und reinigt alles. Man erhält 7 Tou geschälte Hirse. Wie viel Getreide (war es) am Anfang? Die Antwort sagt: 2 Tou 5 Sheng (=Zehntel-Tou).

Die Regel lautet: Mit der Regel Überschuss-Fehlbetrag suche es! Angenommen, es sollen zuerst 2 Tou (sein, dann ist) der Fehlbetrag 2 Sheng; (angenommen) es sollen 3 Tou (sein, dann) hat man einen Überschuss (von) 2 Sheng.

Etwas frei zitiert Vogel 1968, S. 74

Die Regel „Überschuss-Fehlbetrag" wird in dem berühmten chinesischen Rechenbuch erst nach einigen weiteren Aufgaben gegeben. Da der entsprechende Text sich etwas umständlich liest, wollen wir uns diese Regel selbst aufgrund des Textes zusammenreimen:

Zunächst muss man sich vorstellen, was gemäß der Aufgabe geschehen soll. Offenbar fehlt ein besonderes Gefäß zur Reinigung der Grundhirse, um deren Früchte von den Spelzblättern zu trennen. Sie wird deshalb einfach dem schon fertigen Getreide beigemengt, und alles zusammen wird noch einmal gereinigt. Die Grundhirse warf dabei, wie man den mitgeteilten Ergebnissen und anderen Aufgaben entnehmen kann, 60% reines Getreide ab. Nun können wir, wie im Text vorgeschlagen, schätzen: Wären im Fass zuerst 2 Tou, dann würde mit 8 Tou Grundhirse aufgefüllt, von denen nach der Reinigung 4,8 Tou übrig blieben. Zusammen hätte man also 6,8 Tou gereinigtes Getreide, d.h. 0,2 Tou = 2 Sheng zu wenig. Der Schwund wäre etwas zu groß, es muss schon mehr gereinigtes Getreide da gewesen sein. Nach der „Methode des einfachen falschen Ansatzes“ bekäme man für den Anfangsinhalt $\frac{7}{6{,}8} \cdot 2 \text{ Tou} \approx 2{,}06 \text{ Tou}$, der mit etwa 7,94 Tou aufzufüllen wäre. Machen wir ausnahmsweise die Probe: Von der Nachfüllung mit Grundhirse blieben nach der Reinigung nur rund 4,76 Tou, so dass zusammen nicht 7 Tou reines Getreide, sondern nur 6,82 Tou herauskämen.

Im chinesischen Text wird empfohlen, es auch noch mit 3 Tou Startvorrat zu probieren. In der Tat: Es wäre mit 7 Tou aufzufüllen, wovon 4,2 Tou blieben. Zusammen kämen also 7,2 Tou reines Getreide heraus, das sind 0,2 Tou = 2 Sheng zuviel – also gerade soviel mehr als der Startvorrat 2 zu wenig geliefert hatte. Was liegt näher, als den Mittelwert 2,5 Tou für den Startvorrat auszuprobieren! Diesmal wäre mit 7,5 Tou aufzufüllen, wovon 4,5 Tou blieben, so dass insgesamt 7 Tou im Fass wären, wie es anfangs gesagt war.

9

Löse die Aufgabe mithilfe der Buchstabenrechnung. Warum versagt hier der „einfache falsche Ansatz“, und warum hat er bei den zuvor genannten Aufgaben funktioniert?

Wie mag nun die „Regel für den doppelten falschen Ansatz“ lauten? Etwa so: Probiere es sicherheitshalber mit zwei Startwerten. Liefert der eine ein zu großes, der andere ein zu kleines Ergebnis, dann probiere es noch einmal mit dem Mittelwert aus den Startwerten. Das kann man natürlich wiederholen, wenn das Ergebnis noch nicht genau genug getroffen wird: Ersetze nur den Startwert, der ein falsches Ergebnis auf derselben Seite wie der Mittelwert hat, durch den Mittelwert... Das so entstehende Verfahren heißt heute „Methode der Intervallhalbierung“. Es funktioniert zwar in den meisten Fällen, ist aber oft recht langsam und daher eher für theoretische Überlegungen gut als für praktische Rechner. Tatsächlich ist die klassische „Regel des falschen Ansatzes“ ein klein wenig raffinierter. Auf die entscheidende Idee wird man an der nächsten Aufgabe leicht kommen:

Aufgabe VII.12 aus „Neun Bücher arithmetischer Technik“

Jetzt hat man eine Wand, 5 Fuß dick. Zwei Ratten graben sich gegeneinander (durch die Wand; dabei macht) die große Ratte am (ersten) Tag 1 Fuß; die kleine Ratte (macht) ebenfalls am ersten Tag 1 Fuß. Die große Ratte (macht jetzt an jedem) Tag das Doppelte, die kleine Ratte (an jedem) Tag die Hälfte (der Leistung vom Vortag). Frage: An wie viel Tagen treffen sie sich, (und) wie viel hat jede gegraben? Die Antwort sagt: Es sind $2\frac{2}{17}$ Tage...

Die Regel lautet: Angenommen es sollen 2 Tage (sein, dann hat man einen) Fehlbetrag (von) 5 Zoll; (angenommen) es sollen 3 Tage (sein, dann) hat man einen Überschuss (von) 3 Fuß 7 Zoll (und) einen halben...

Zitiert nach Vogel 1968, S. 75

Offensichtlich ist der Fehler bei drei Tagen sehr viel größer als der bei zwei Tagen (jeder Fuß hatte 10 Zoll). Der richtige Zeitraum wird also nicht in der Mitte liegen, sondern viel näher bei 2 als bei 3 Tagen. Kann man raten wo? Rechnen wir einmal nach:

Versuch mit 2 Tagen ($x_1 = 2$):	Versuch mit 3 Tagen ($x_2 = 3$):
Weg der großen Ratte: 3 Fuß,	Weg der großen Ratte: 7 Fuß
Weg der kleinen Ratte: 1,5 Fuß,	Weg der kleinen Ratte: 1,75 Fuß
zusammen: 4,5 Fuß,	zusammen: 8,75 Fuß
Fehler_1: –0,5 Fuß	Fehler_2: +3,75 Fuß

Bei zwei Tagen fehlen noch 2 Viertelfüße, und bei drei Tagen sind es 15 Viertelfüße zuviel. Der dritte Tag sollte folglich – so bestimmt es jedenfalls die chinesische Lösung – im Verhältnis 2:15 geteilt werden, d.h. in 17 Teile. Während der ersten beiden arbeiten sich die Ratten aufeinander zu, danach entfernen sie sich wieder.[2] Der „richtige“ Zeitraum ergebe sich, wenn man x_1 um zwei Siebzehntel-Tage verlängere.

10

Die folgende Aufgabe stammt aus einer altbabylonischen Tafel (AO 6770, Aufg. 2; um 1700 v. Chr.): „In wie viel Jahren verdoppelt sich ein Kapital von 1 *gur?“ (Zitiert nach Tropfke 1980, S. 372). Gerechnet wird jahrweise mit 20% Zinseszins. Das gibt nach* 3 *Jahren* 1,728 *gur, nach* 4 *Jahren aber schon* 2,074 *gur. Der babylonische Text gibt eine Lösung an, die auf* 3 *Jahre und* $9 + \frac{26}{60} + \frac{40}{3600}$ *Monate hinausläuft. Stimmt das? (Näheres zur babylonischen Zinsrechnung in Tropfke 1980, S. 535 f. – Man beachte, dass auch bei uns Bruchteile von Jahren mit einfachem Zins berechnet werden!)*

Achtung: Auch "unterjähriger Zins" wird inzwischen exponentiell behandelt!

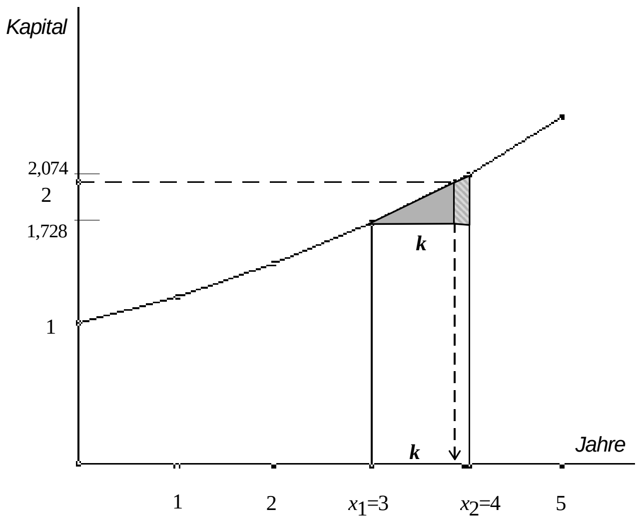
Wir wollen die Lösung mit unseren modernen Mitteln (Zeichnung, Buchstabenrechnung, Funktionsbegriff) nachvollziehen, weil sie das gesuchte Prinzip sehr schön klärt:

Mit $f(x)$ sei der Kapitalstand nach x Jahren bezeichnet. Für ganzzahlige x gilt dann $f(x) = 1{,}2^x$, und in den Zwischenzeiten verläuft $f(x)$ linear. Als erste Schätzung für die gesuchte Zeit x_o nehmen wir $x_1 = 3$, und als zweite Schätzung $x_2 = 4$. Gesucht ist die Korrektur k mit $x_o = x_1 + k$. Wegen der Ähnlichkeit der beiden Steigungsdreiecke hat man allgemein

$$(1) \quad \frac{k}{f(x_0) - f(x_1)} = \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$$

und mit den gegebenen Zahlen der Aufgabe

$$(2) \quad \frac{k}{2 - 1{,}2^3} = \frac{4 - 3}{1{,}2^4 - 1{,}2^3},$$



d.h. $k = 0{,}7870...$, in Monaten: $12k = 9\frac{4}{9} = 9 + \frac{26}{60} + \frac{40}{3600}$. Der babylonische Rechner hatte demnach Recht.

Die Formel (1) lohnt noch eine genauere Betrachtung:

Der erste Nenner ist bis auf das Vorzeichen der erste Ergebnisfehler $Fehler_1 := f(x_1) - f(x_o)$, und der Bruch auf der rechten Seite ist der Kehrwert der Sehnensteigung zwischen den Probierpunkten. Damit läßt sich die allgemeine „Regula falsi“, d.h. die „Methode des falschen Ansatzes“ so formulieren:

---

[2] Ob diese Lösung ganz korrekt ist, läßt sich schwer entscheiden, weil nur gesagt wird, wie viel die Ratten in vollen Tagen schaffen: Für die große Ratte sind es nach n Tagen $2^n - 1$ Fuß, und für die kleine $2 - 2^{1-n}$, so dass nach x Tagen zusammen eine Wegstrecke von $f(x) := 2^x + 1 - 2^{1-x}$ Fuß geschafft sein mag. Es ist aber $f(2\frac{2}{17}) \approx 4{,}88$ und nicht gleich 5. Die richtige Lösung läge dann zwischen 2,15 und 2,16 Tagen, und nicht bei $2\frac{2}{17} \approx 2{,}12$. Den Ratten wird das egal gewesen sein.

Der doppelte falsche Ansatz („Regula falsi"):

Liefern die Testwerte x_1 und x_2 falsche Ergebnisse, dann berechne man den ersten Ergebnisfehler *Fehler*$_1$ $:= f(x_1) - f(x_0)$ und die *Sehnensteigung* $:= \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Korrigiert man nun x_1 in der folgenden Weise:

$$x_{neu} := x_1 - \frac{Fehler_1}{Sehnensteigung} = x_1 + \frac{f(x_0) - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot (x_2 - x_1) \,,$$

dann gibt x_{neu} in der Regel das richtige Ergebnis x_0 oder wenigstens eine verbesserte Schätzung an.

Liegen die falschen Ergebnisse *zu verschiedenen Seiten* des richtigen, dann kann man einfach mit den Fehler*beträgen* und deren Summe arbeiten. Ein guter Kandidat für das richtige Ergebnis ist dann das (über Kreuz) *gewichtete Mittel*

$$\frac{|Fehler_2|}{Fehlersumme} \cdot x_1 + \frac{|Fehler_1|}{Fehlersumme} \cdot x_2 \;.$$

11

Beweise die Regel vom über Kreuz gewichteten Mittel.

12

Eine typische Aufgabe aus dem entsprechenden Kapitel in Ries' Rechenbuch lautet (in heutiger Sprache, nach Deschauer, S. 93):

„Drei Gesellen wollen ein Haus für 200 *Gulden kaufen. Der erste gibt dreimal mehr als der zweite und der zweite viermal mehr als der dritte. Die Frage: Wie viel soll jeder bezahlen? Setze an, der dritte gebe* 10 *Gulden... Zähle zusammen, es werden* 170 *Gulden. Das sind* 30 *zu wenig. Setze deshalb für den dritten* 15 *Gulden an und überprüfe es..."*

Im berühmtesten Rechenbuch von Adam Ries aus dem Jahre 1522 liest sich diese Regel so:

Wirdt geſagt von zweyen falſchen zahlen... Sagen ſie der warheit zu viel, ſo bezeichne ſie mit dem Zeichen + plus, wo aber zu wenig, ſo beſchreib ſie mit dem Zeichen - minus genannt ... Leugt aber ein falſche Zahl zu viel, und die ander zu wenig, ſo addir zuſamen die zwo lügen, was da kompt, iſt dein theiler. Darnach multiplicir im Creutz, addir zuſamen und theil ab, ſo geſchicht die aufflöſung der frag ...

Zitiert nach Vogel 1961, S. 92

13

Berechne die Quadrat- und die Kubikwurzel aus 10 *mit der Methode des doppelten falschen Ansatzes näherungsweise, indem du beide Mal von zwei ganzzahligen Schätzwerten ausgehst. (Für die Quadratwurzel ergibt sich zufällig ein berühmter Wert, nämlich der Archimedische Wert für* π.)

Abschließende Bemerkungen und Zusätze

Die Herleitung der Regel vom doppelten falschen Ansatz stützt sich wesentlich auf den geradlinigen Verlauf des Funktionsgraphen zwischen den beiden Probierpunkten. Nur in diesem Fall garantiert der neue Schätzwert x_{neu} schon die exakte Lösung. Die Regula falsi stellt lediglich eine Formel für die *lineare* Interpolation und Extrapolation dar. Daraus erklärt sich auch, dass sie bei nichtlinearen Problemen, wie etwa beim Rattenproblem oder bei den Wurzelberechnungen oben, i. Allg. nur verbesserte Näherungswerte liefert. Das wurde schon im Mittelalter klar erkannt. Qusta ibn Luqa schrieb um 900 n. Chr.: „Es ist dies das umfassende Kapitel, mit dessen Hilfe alle Aufgaben der Rechenkunst, in denen keine Wurzeln vorkommen, gelöst werden können.“ (Tropfke 1980, S. 373)

> **Vnd heisst nit darumb falsi daß sie falsch oder unrecht wehr, sunder daß sie aus zweyen falschen und unwahrhaftigen zalen, und zweyen lügen die wahrhaftige und begehrte zal finden lernt.**
>
> P. Apian
> (zit. n. Smith II, S. 441)

Dass man das Verfahren trotzdem gewinnbringend anwenden kann, wenn man es notfalls iteriert, hat wohl zuerst Cardano im 30. Kapitel seiner „Ars magna“ von 1545 bemerkt. Dort wendet er es auf Gleichungen dritten und vierten Grades an. Die oben vorgeführte Herleitung der Regula falsi geht absichtlich wie Cardano asymmetrisch vor, indem eine Korrektur k zum ersten Schätzwert x_1 beschafft wird. In dieser Form als „Sekantenmethode“ ist die Regula falsi numerisch stabiler als die „Regel über Kreuz“, und es liegen so auch weitere Näherungsverfahren ganz nahe, etwa das Newtonsche (1669, unveröff.; erste Veröff. von Raphson), bei dem die Sekantensteigung lediglich durch die Tangentensteigung ersetzt ist, das von Halley (1694) und das von Steffensen (vgl. etwa Ledermann), aber auch das folgende, das die Schlüsselidee zur Methode der Maxima und Minima von Fermat und damit den algebraischen Zugang zur Differentialrechnung liefert:

L. Euler: Von der Auflösung der Gleichungen durch Näherung

aus: „Vollständige Anleitung zur Algebra“ (1767/70), Kap. 16, Nr. 223f.

Wenn die Wurzeln (=Lösungen) einer Gleichung nicht rational sind, sie mögen nun durch Wurzelzeichen ausgedrückt werden können oder auch nicht, wie es etwa bei den Gleichungen höheren Grades der Fall ist, so muss man sich damit begnügen, ihren Wert durch Näherungen derart zu bestimmen, dass man ihrem wahren Wert immer näher kommt, bis der Fehler endlich für nichts zu achten ist. Es sind zu diesem Zwecke verschiedene Methoden erfunden worden, deren wichtigste wir hier erklären wollen.

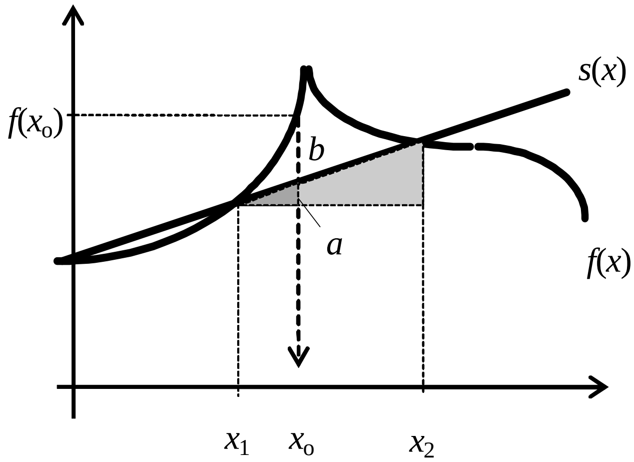
Die erste Methode beruht auf der Voraussetzung, dass man den Wert einer Wurzel schon ziemlich genau erforscht hat, also z.B. schon weiß, dass er größer als 4 und doch kleiner als 5 ist. Dann setzt man den Wert der Wurzel gleich $4+p$, worin dann p gewiss einen (echten) Bruch bedeuten wird; ist aber p ein (echter) Bruch, also kleiner als 1, so ist das Quadrat, der Kubus und jede höhere Potenz von p noch weit kleiner; daher kann man diese aus der Rechnung weglassen, weil es doch nur auf eine Näherung ankommt. Hat man nun weiter diesen Bruch p nur angenähert bestimmt, so kennt man die Wurzel $4+p$ schon genauer. Hieraus erforscht man in gleicher Art einen noch genaueren Wert und geht so weiter fort, bis man dem wahren Wert so nahe gekommen ist als man wünscht.

Auch ohne diese Ansätze hier weiter auszuführen, sollte deutlich geworden sein, dass die Beschäftigung mit „falschen Ansätzen“ nicht nur lohnt, weil sie seit alters her der alltäglichen Gewohnheit informellen Rechnens entsprechen, sondern auch, weil sie die Macht der Algebra zeigen und die gedanklichen Ansätze der Differentialrechnung vorbereiten. So ist es wohl kein Zufall, dass die Zeichen + und – erstmals im Rechenbuch von Johannes Widmann 1489 gedruckt erschienen, und zwar als Vorzeichen der beiden Fehler im doppelten falschen Ansatz. Der geschickte Umgang mit dieser Technik gehörte seit dem arabischen Mittelalter und seit Fibonacci zu den Standardthemen in den Büchern der Rechenmeister und hat sicher einiges zur Gewöhnung an negative Vorzeichen beigetragen.

Bei unser tour d'horizon durch einschlägige historische Rechenaufgaben aus aller Welt zeigte sich deutlich, wo und wie die Grenzen umgangssprachlich bewältigbarer Rechnereien am Rande des bürgerlichen Rechnens erreicht wurden. Die typischen Aufgaben lagen meist jenseits des Dreisatzes, und die aufgestellten Regeln erforderten erhebliche Formulierungs- und Lesekünste. Wirkliche Klarheit brachten erst die neuen Mittel nach 1600, die Buchstabenrechnung, Funktionsbegriff und -grafiken. Die erwähnten Beispiele zeigen aber auch etwas anderes: Sie wirken durchweg konstruiert und entsprachen höchst selten echten Erfordernissen des täglichen Lebens. Es waren „eingekleidete Aufgaben" mit aufgesetztem Lebensweltbezug, „Unterhaltungsmathematik" (z.B. Tropfke 1980), Umkehrprobleme oder „Subwissenschaft", wie es Jens Høyrup (in Scholz 1990) ausdrückt. Man achte das nicht gering: Der gigantische Aufschwung der mathematischen Theorie im 17. Jahrhundert war nicht zuletzt Frucht einer wahrhaft renaissancehaften Lust am Rechnenkönnen. Als Keim der späteren Differentialrechnung erwies sich schließlich die Idee, Eingangs- und Ausgangsgrößen wenigstens lokal linear aufeinander zu beziehen – nach dem Muster der einstmals berühmten Regula falsi...

> ... alle mehr zur erhebung des verstandts / als von nutz wegen geschrieben / will darumb kein blöden kopff darmit / als mit notdurfftiger rechnung / beladen haben...
>
> Christoph Rudolff 1525
> (nach Tropfke 1980, S. 526)

Anhang zur Numerik



Im Unterricht wird man sich mit konkreten Beispielen begnügen und nur im Einzelfall prüfen was passiert, wenn die Funktion *f* nicht linear ist. Für den Lehrer sollten die folgenden Informationen trotzdem nützlich sein:

Wir hatten die Regula falsi als Sekantenmethode formuliert:

(1) $$x_{neu} := x_1 + \frac{f(x_0) - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot (x_2 - x_1)\,.$$

Um den Effekt der Abweichung vom Linearen zu studieren, vergleichen wir mit der Sekante(nfunktion) $s(x)$ und setzen $a := s(x_0) - f(x_1)$, $b := f(x_0) - s(x_0)$. Offenbar steckt dann in b ein Maß für die Nichtlinearität der Aufgabe. Nach (1) gilt nun wegen $a : (f(x_2) - f(x_1)) = (x_0 - x_1) : (x_2 - x_1)$ (s. nächste Zeichnung)

(2) $$\begin{aligned} x_{neu} &= x_1 + \frac{a}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{b}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot (x_2 - x_1) \\ &= x_0 + \frac{b}{\text{Sekantensteigung}}\,. \end{aligned}$$

Der Näherungsfehler von x_{neu} gegenüber dem richtigen x_0 ergibt sich also wohl aus b, das b spielt aber seine Rolle nur relativ zur Steilheit des Graphen bzw. der Sekante.

Im Bild ist die Sekantensteigung etwa $\frac{1}{3}$, so dass x_{neu} um etwa $3b$ rechts neben x_0 liegt, und damit außerhalb von $[x_1; x_2]$. In diesem Fall besteht kaum Hoffnung, x_0 durch weitere Iterationen zu finden – die Sekante „merkt nichts“ von Funktionsbuckeln.

Das spricht für das ursprüngliche Verfahren der Methode des falschen Ansatzes (method of false position), bei dem Startwerte und die Verbesserungen (nur aus $[x_1; x_2]$) so ausgewählt werden, dass ihre Funktionswerte das verlangte $f(x_0)$ stets umrahmen. Auf diese Weise wird das Näherungsintervall $[x_1; x_2]$ automatisch verkleinert, und das Verfahren konvergiert bei stetigem *f* sicher.

Der Nachteil ist die langsame Konvergenz. Die Konvergenzordnung ist allgemein nicht größer als bei der Intervallhalbierung, nämlich $p = 1$, während sie beim Newton-Raphson- und auch beim Steffensen-Verfahren $p = 2$ beträgt, beim Halley-Verfahren sogar $p = 3$. Bei der Regula falsi in unser Form der „Sekantenmethode“, die Inter- und Extrapolationen zuläßt, ist immerhin $p \approx 1{,}618$ (Goldener Schnitt!), wenn die Funktion *f* hinreichend glatt ist und die Folge der Näherungsstellen $x_n = x_0 + \varepsilon_n$ überhaupt konvergiert (wofür hinreichend genaue $f(x_n)$ Indizien liefern). Dabei wird unter „Konvergenzordnung“ – grob gesagt – das p verstanden, für das $\varepsilon_{n+1} \approx Konst \cdot \varepsilon_n{}^p$ ist, genauer (nach Kose u.a., S. 169f.): ein konvergentes Iterationsverfahren hat mindestens die Konvergenzordnung p, wenn es eine passende Zahl c gibt, so dass für alle n stets $|x_{n+1} - x_0| \le c \cdot |x_n - x_0|^p$ gilt. Einzelheiten und Beweise findet man z.B. in Ledermann oder Stummel/Hainer.

Literatur:

Cardano, G.: Ars magna or the Rules of Algebra (engl. Übers. v. T.R. Witmer). New York: Dover 1993.

Deschauer, S.: Das zweite Rechenbuch von Adam Ries. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1992.

Euler, L.: Vollständige Anleitung zur Algebra. Stuttgart: Reclam 1959.

Eves, H.: On the Practicality of the Rule of False Position. In: Math. Teacher 51 (1958), 606-608.

Fermat, P.: Abhandlungen über Maxima und Minima. Leipzig: Ostwalds Klassiker (Nr. 238) 1933.

Kose, K.; Schröder, R.; Wieliczek, K.: Numerik sehen und verstehen. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1992.

Ledermann, W. (Ed.): Handbook of Applicable Mathematics, Vol. III: Numerical Methods (Chapter 5). Chichester, New York u.a.: John Wiley 1981.

Lüneburg, H.: Leonardo Pisani – Liber Abbaci... Mannheim: BI (2. Aufl.:) 1993.

Pichot, A.: Die Geburt der Wissenschaft – Von den Babyloniern zu den frühen Griechen. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1995.

Rebstock, U.: Rechnen im islamischen Orient. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1992.

Robins, G.; Shute, C.: The Rhind Mathematical Papyrus. New York: Dover 1987.

Scholz, E. (Hrsg.): Geschichte der Algebra. Mannheim: BI 1990.

Smith, D.E.: History of Mathematics, Vol. II. New York: Dover 1958.

Stummel, F.; Hainer, K.: Praktische Mathematik. Stuttgart: Teubner (2. Aufl.:) 1982.

Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik, Band 3. Berlin: de Gruyter (3. Aufl.:) 1937.

Tropfke, J.: Geschichte der Elementarmathematik, Band 1. Berlin: de Gruyter (4. Aufl.:) 1980.

Vogel, K.: Der „falsche Ansatz“ in der babylonischen Mathematik. In: MPhSB 7 (1961), 89-95.

Vogel, K. (Hrsg.): Neun Bücher arithmetischer Technik. Braunschweig: Vieweg 1968.

Adresse des Autors:

Prof. Dr. Lutz Führer, Institut für Didaktik der Mathematik, Senckenberganlage 9, 60054 Frankfurt am Main

fuehrer@math.uni-frankfurt.de